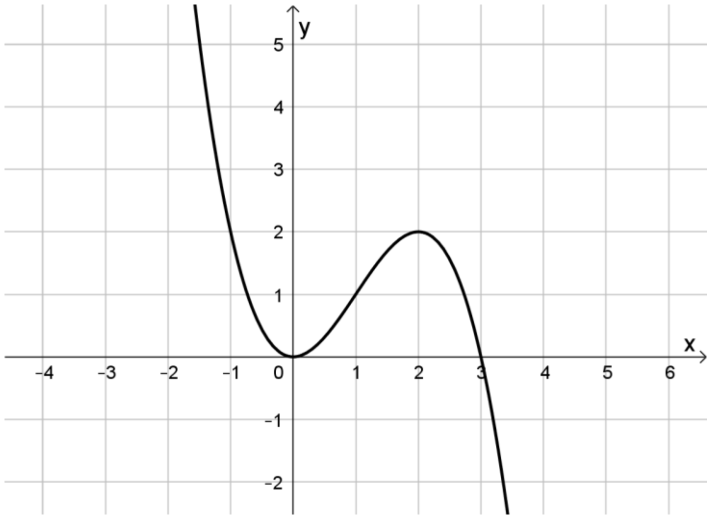
Ganzrationale Funktionen • Krümmung und Wendepunkte
Übung

1. Lesen Sie am Graphen von $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ den Wendepunkt sowie die Krümmungsintervalle ab. Bestätigen Sie Ihre Entscheidung durch Rechnung. •∘∘



2. Bestimmen Sie die größtmöglichen Krümmungsintervalle folgender Funktionen. Geben Sie auch die Koordinaten aller Wendepunkte an. •∘∘

   a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$

   b) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x$

   c) $f(x) = -\frac{1}{12}(x^4 - 8x^3 + 48x + 24)$

   d) $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - 3x^3 + 2x - 6$

3. Die folgende Tabelle zeigt, auf zwei Nachkommastellen gerundet, die Funktionswerte sowie der Werte der zweiten und dritten Ableitung der ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Entnehmen Sie die Koordinaten aller Wendepunkte. •∘∘

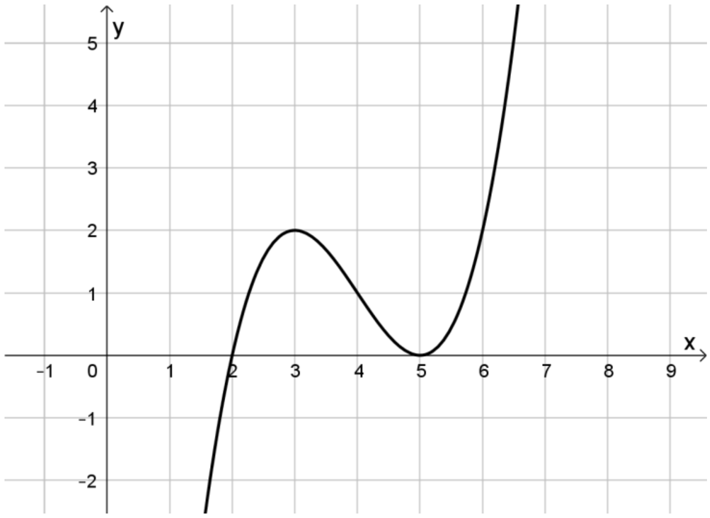
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$-44{,}08$	-38	$-26{,}75$	$-15{,}33$	$-6{,}75$	-2	$-0{,}08$	2	$9{,}25$	$28{,}67$	$69{,}25$
$f''(x)$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12	21	32
$f'''(x)$	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12

4. Begründen Sie anhand der Funktion $f(x) = x^4$, dass die Bedingung $f''(x_0) = 0$ nicht ausreichend für die Existenz eines Wendepunkts ist. ••∘

5. Beweisen Sie, dass jede ganzrationale Funktion dritten Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (es ist $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$) einen Wendepunkt besitzt. Bestätigen Sie ferner, dass c und d unerheblich für die Wendestelle x_W sind und dass gilt: $x_W = -\frac{b}{3a}$. ••◦

6. Die Existenz einer Wendestelle x_0 kann nachgewiesen werden durch die beiden Kriterien $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.
Zeigen Sie, dass diese Kriterien nicht ausreichen, um den Wendepunkt der Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x^5$ zu bestätigen. ••◦

7. Folgender Graph zeigt die zweite Ableitung $f''(x)$ der ganzrationalen Funktion f. Entnehmen Sie dem Schaubild die maximalen Krümmungsintervalle sowie die Wendestellen der Funktion f. ••◦



8. Bestimmen Sie die Wendetangente der Funktion f mit dem Term $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{7}{2}x + 2$. ••◦

Ganzrationale Funktionen • Krümmung und Wendepunkte
Lösung

1. Der Wendepunkt des Graphen liegt bei $WEP(1;1)$.
   Der Graph von f ist linksgekrümmt im Bereich $]-\infty;1]$ und rechtsgekrümmt in $[1;\infty[$.
   Es ist $f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+3x$ und $f''(x)=-3x+3$. Offensichtlich gilt $f''(1)=0$. Da es sich bei $x_1=1$ um eine einfach Nullstelle von $f''(x)$ handelt, liegt ein Vorzeichenwechsel vor, also handelt es sich tatsächlich um eine Wendestelle. Einsetzen in $f(x)$ liefert den entsprechenden Wendepunkt: $f(1)=1$, also $WEP(1;1)$. Weitere Nullstellen von $f''(x)$ liegen nicht vor.

2.
   a) G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty;0]$ und linksgekrümmt in $[0;\infty[$.
      $WEP(0;1)$

   b) G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty;3]$ und linksgekrümmt in $[3;\infty[$.
      $WEP(3;3)$

   c) $f'(x)=-\frac{1}{12}(4x^3-24x^2+48)$
      und $f'(x)=-\frac{1}{12}(12x^2-48x)=-x^2+4x=-x(x-4)$.
      G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty;0]$ bzw. $[4;\infty[$ und linksgekrümmt in $[0;4]$.
      Wendepunkte $WEP_1(0;-2)$ und $WEP_2\left(4;\frac{10}{3}\right)$

   d) $f'(x)=\frac{1}{2}x^4-9x^2+2$ und $f''(x)=2x^3-18x=2x(x-3)(x+3)$.

x	$x<-3$	$-3<x<0$	$0<x<3$	$x>3$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
G_f	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt

   G_f ist rechtgekrümmt in $]-\infty;-3]$ bzw. $[0;3]$
   und linksgekrümmt in $[-3;0]$ bzw. $[3;\infty[$.
   $WEP_1(-3;44{,}7)$ und $WEP_2(3;-56{,}7)$

3. Hinweis: Es handelt sich hier um die Funktionswerte von
   $f(x)=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x-2$. Es existieren die beiden Wendepunkte
   $WEP_1(-3;-26{,}75)$ und $WEP_2(1;-0{,}08)$.

4. Für $f(x)=x^4$ ist $f'(x)=4x^3$ und $f''(x)=12x^2$.
   Die einzige Nullstelle von $f''(x)$ lautet $x_1=0$, allerdings gilt $f''(x)>0$ für alle anderen Werte von x. Folglich besitzt $f''(x)$ keine Vorzeichenwechsel an der Stelle $x_1=0$ und damit auch keinen Wendepunkt.

5. Die zweite Ableitungsfunktion von $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ lautet $f''(x) = 6ax + 2b$. Die beiden Summanden, die c und d beinhalten, fallen beim Ableiten weg und sind daher für die Wendestelle unerheblich. Das es sich bei $f''(x)$ um eine lineare Funktion mit $a \neq 0$ handelt, besitzt diese stets eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x_W = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$.

6. $f'(x) = -\frac{1}{2}x^4$
$f''(x) = -2x^3$
$f'''(x) = 6x^2$
$f''(x)$ hat die einzige Nullstelle bei $x_1 = 0$, allerdings ist auch $f'''(0) = 0$.
Dass es sich trotzdem um einen Wendepunkt handelt, kann man mit Hilfe einer Vorzeichentabelle zeigen.

x	$x < 0$	$x > 0$
$f''(x)$	$+$	$-$

7.

x	$x < 2$	$2 < x < 5$	$x > 5$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
G_f	rechtsgekrümmt	linksgekrümmt	linksgekrümmt

Der Graph G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; 2]$ und linksgekrümmt in $[2; \infty[$.
Ein Wendepunkt liegt vor bei $x_1 = 2$.
Bei $x_2 = 5$ kein Wendepunkt, da hier zwar eine Nullstelle von $f''(x)$, aber kein Vorzeichenwechsel vorliegt.

8. Für $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{7}{2}x + 2$ ist
$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{7}{2}$ und $f''(x) = 3x + 6$.
Der Wendepunkt liegt bei $WEP(-2; 3)$.
Die Wendetangente besitzt die Gleichung $g(x) = -2{,}5x - 2$.